# Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$.

Leçons : 260, 262, 264, peut-être aussi 234, 235, 241.

Référence : sans référence (donc à bien réviser).

**Théorème 1**

*Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Notons $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$. Posons $S_0 = (0, \dots, 0) =: 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Le nombre moyen de passages en 0 est fini si et seulement si la dimension $d$ est supérieure ou égale à 3, i.e. $\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}) < +\infty \Leftrightarrow d \geq 3$.*

**Corollaire 2**

*Si $d \geq 3$ alors presque sûrement la marche aléatoire part à l'infini (i.e. $\mathbb{P}(||S_n||_1 \to +\infty) = 1$).*

**Corollaire 3**

*Si $d \leq 2$ alors presque sûrement la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0.*

Preuve du Théorème 1 :

$\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2k} = 0)$ par convergence monotone (pour la première égalité) et parce qu'il faut un nombre pair de pas pour revenir à l'origine (pour la seconde égalité).

$$\text{Posons } f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to \quad \mathbb{C} \\ x & \mapsto \quad \varphi_{S_n}(2\pi x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\cap\bar{B}_{||.||_1}(0,n)} \mathbb{P}(S_n = k)e^{2i\pi k.x} \end{cases}.$$

Par linéarité de l'intégrale (et en remarquant que $\mathbb{Z}^d \cap \bar{B}_{||.||_1}(0, n)$ est fini) on a : $\mathbb{P}(S_n = 0) = \int_{[0,1]^d} f_n(t)dt$, et, par indépendance des $X_i$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \ f_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(2\pi x) = (\varphi_{X_1}(2\pi x))^n.$$

Posons $f : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \varphi_{X_1}(2\pi x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2d}(e^{2i\pi x_j} + e^{-2i\pi x_j}) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\cos(2\pi x_j) \end{cases}$.

Ainsi, $\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[0,1]^d} (f(t))^{2k}dt = \int_{[0,1]^d} \sum_{k=0}^{+\infty} (f(t))^{2k}dt$ (Fubini-Tonelli car pour tout $k \in \mathbb{N}$ $f(t)^{2k} \in [0,1]$) or $\int_{[0,1]^d} \sum_{k=0}^{+\infty} (f(t))^{2k}dt = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1-(f(t))^2}dt$ car pour presque tout $t$ $(f(t))^2 \neq 1$ (car $(f(t))^2 = 1 \Leftrightarrow \cos(2\pi t_1) = \cdots = \cos(2\pi t_d) = \pm 1 \Leftrightarrow (t_1, \ldots, t_d) \in \{0,1\}^d$ ou $(t_1, \ldots, t_d) = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$) donc :

$$\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}) = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1-(f(t))^2}dt.$$

Remarquons que $f(x) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}(1 - 2\pi^2 x_j^2 + o(||x||_2^2)) = 1 - \frac{2\pi^2}{d}||x||_2^2 + o(||x||_2^2)$ (les $o$ étant en 0) donc $1 - (f(x))^2 = \frac{4\pi^2}{d}||x||_2^2 + o(||x||_2^2)$ donc :

$$1 - (f(x))^2 \sim \frac{4\pi^2}{d}||x||_2^2 \text{ donc } \frac{1}{1-(f(x))^2} \sim \frac{d}{4\pi^2}\frac{1}{||x||_2^2}$$

donc $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable au voisinage de $(0, \ldots, 0)$ ssi $d \geq 3$ (en utilisant ce résultat pour $\frac{1}{||x||_2^2}$, que l'on obtient en passant en coordonnées sphériques (resp. polaires) en dimension 3 (resp. 2) et en remarquant que si $d \geq 3$ alors $\frac{1}{||x||_2^2} \leq \frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$)

or $\frac{1}{1-f^2}$ est invariante par translation de $\mathbb{Z}^d$ et de $(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$

donc $\int_{[0,1]^d} \frac{1}{1-f^2}dt < +\infty$ ssi $d \geq 3$

donc $\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}) < +\infty$ ssi $d \geq 3$.

<u>Preuve du Corollaire 2</u> :

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\mathbb{P}(S_n = k) > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+||k||_1} = 0 | S_n = k) =& \frac{\mathbb{P}((X_{n+1}, \ldots, X_{n+||k||_1}) \text{ chemin de } k \text{ à } 0 \cap S_n = k)}{\mathbb{P}(S_n = k)} \\ =& \mathbb{P}((X_{n+1}, \ldots, X_{n+||k||_1}) \text{ chemin de } k \text{ à } 0) \\ \geq& \frac{1}{(2d)^{||k||_1}} > 0\end{aligned}$$

par indépendance des $X_i$ pour l'égalité et en considérant le chemin $(k_1,\dots,k_d) \to (0,k_2,\dots,k_d) \to (0,0,k_3,\dots,k_d) \to \dots \to (0,\dots,0)$ pour l'inégalité.

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}\{S_n = k\}) &= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_n = k)\\ &\leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=||k||_1}^{||k||_1+N} \frac{\mathbb{P}(S_n=0)}{\mathbb{P}(S_n = 0 | S_{n-||k||_1} = k)} \leq (2d)^{||k||_1} \mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}})\end{aligned}$$

qui est finie si $d \geq 3$ d'après le Théorème 1.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la marche aléatoire ne passe presque sûrement qu'un nombre fini de fois par des points de $\mathbb{Z}^d \cap \bar{B}_{||\cdot||_1}(0,n)$ (qui est fini) donc presque sûrement $||S_n||_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car une intersection dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûr).

Preuve du Corollaire 3 :

Considérons la variable aléatoire $T = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n = 0\}$.

Nous voulons montrer que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1$ si $d \leq 2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T < +\infty) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0 \text{ et } \forall m > n \ (X_{n+1},\dots,X_m) \text{ n'est pas un chemin de 0 à 0})\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(\forall m > n \ (X_{n+1},\dots,X_m) \text{ n'est pas un chemin de 0 à 0})\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(\forall m > 0 \ (X_1,\dots,X_m) \text{ n'est pas un chemin de 0 à 0})\end{aligned}$$

donc $\mathbb{P}(T < +\infty) = \mathbb{P}(T = 0) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(T = 0)\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}})$

or $\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}) = +\infty$ si $d \leq 2$ d'après le Théorème 1 et $\mathbb{P}(T < +\infty) \in [0,1]$ donc $\mathbb{P}(T = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$ donc $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1$.